Tronc Commun

Série 2 : Calcul Trigonométrique

Exercice 1 :

1. Résoudre dans $[0,2\pi]$ les équations :
   a. $\cos x = \frac{1}{2}$
   b. $\cos x = -1$
2. Montrer que pout tout élément x de $[0,2\pi]$ on a :
   $2\cos^2(x)+\cos(x)-1=(2\cos(x)-1)(\cos(x)+1)$
3. Résoudre dans $[0,2\pi]$ l' équation :
   $$2\cos^2(x)+\cos(x)-1=0$$
4. Etudier le signe de : $2\cos^2(x)+\cos(x)-1$
5. En déduire dans $[0,2\pi]$ l'ensemble de solutions de l'inéquation :
   $2\cos^2(x)+\cos(x)-1\geq 0$

Exercice 2 :

On pose $f(x)=2\sin^2(x)-\sin(x)-1$, pour tout x de $\mathbb{R}$

1. Calculer $f\left(\frac{2019\pi}{6}\right)$
2. Montrer que $f(\pi-x)=f(x)$
3. Résoudre dans $I=[0,2\pi[$:
   a) $f(x)=0$
   b) $f(x)>0$

Exercice 3 :

Soit x un nombre réel vérifiant l'égalité : (1) : $\sin(x)\times\cos(x)=\frac{1}{2}$

1. Démontrer que $\sin x=\cos x$
2. Déterminer toutes les valeurs de x vérifiant (1)

Exercice 4 :

Etablir les inégalités suivantes :

1. $\cos^4(x)-\sin^4(x)=2\cos^2(x)-1$
2. $\cos^6(x)+\sin^6(x)+3\sin^2(x)\cos^2(x)=1$

Exercice 5 :

Exprimer en fonction de $\tan(x)$

1. $A(x)=\dfrac{\sin^3(x)-\cos^3(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$
2. $B(x)=\cos^2(x)-5\sin(x)\cos(x)$

Corrigé de l'exercice 1 :

1.

a) Résolvons dans $[0, 2\pi]$: $\cos x = \frac{1}{2}$

$\cos x = \frac{1}{2}$ équivaut à $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$\text{Equivaut à } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

▷ On a :

$0 \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2\pi$

$0 \leq \frac{1}{3} + 2k \leq 2$

$-\frac{1}{6} \leq k \leq \frac{5}{6}$

Puisque $k \in \mathbb{Z}$, alors $k = 0$

Donc $x=\frac{\pi}{3}$

▷ On a :

$$0\leq -\frac{\pi}{3}+2k\pi\leq 2\pi$$

$$0\leq \frac{-1}{3}+2k\leq 2$$

$$\frac{1}{6}\leq k\leq \frac{7}{6}$$

Puisque $k\in\mathbb{Z}$, alors $k=1$

Donc $x=\frac{5\pi}{3}$

Et par suite : $S=\left\{\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right\}$

b) Résolvons dans $[0,2\pi]$: $\cos x=-1$

$\cos x=-1$ équivaut à $x=\pi+2k\pi$

▷ On a :

$$0\leq \pi+2k\pi\leq 2\pi$$

$$0\leq 1+2k\leq 2$$

$$-\frac{1}{2}\leq k\leq \frac{1}{2}$$

Puisque $k\in\mathbb{Z}$, alors $k=0$

Donc $x=\pi$

Et par suite : $S=\{\pi\}$

2. Soit x un élément de $[0,2\pi]$, on a :

$$(2\cos(x)-1)(\cos(x)+1)=2\cos^2(x)+2\cos(x)-\cos(x)-1$$

Donc : $2\cos^2(x)+\cos(x)-1=(2\cos(x)-1)(\cos(x)+1)$

3. Résolvons dans $[0,2\pi]$, l'équation : $2\cos^2(x)+\cos(x)-1=0$

$2\cos^2(x)+\cos(x)-1=0$ Équivaut à $(2\cos(x)-1)(\cos(x)+1)=0$

Equivaut à $2\cos(x)-1=0$ *ou* $\cos(x)+1=0$

Equivaut à $\cos(x)=\dfrac{1}{2}$ *ou* $\cos(x)=-1$

Et par suite : $S=\left\{\dfrac{\pi}{3},\pi,\dfrac{5\pi}{3}\right\}$

4. Etudions le signe de : $2\cos^2(x)+\cos(x)-1$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$2\cos2(x)+\cos(x)-1$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

5. Résolvons dans $[0,2\pi]$, l'inéquation $2\cos^2(x)+\cos(x)-1\geq 0$

$$S=\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\cup\{\pi\}\cup\left[\frac{5\pi}{3},2\pi\right]$$

Corrigé de l'exercice 2 :

On pose $f(x)=2\sin^2(x)-\sin(x)-1$, pour tout x de $\mathbb{R}$

1. On a : $\dfrac{2019\pi}{6}=\dfrac{3\pi+2016\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+336\pi=\dfrac{\pi}{2}+2(168)\pi$

Donc $\sin\left(\dfrac{2019\pi}{6}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2(168)\pi\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$

Et par suite :

$f\left(\dfrac{2019\pi}{6}\right)=2\sin^2\left(\dfrac{2019\pi}{6}\right)-\sin\left(\dfrac{2019\pi}{6}\right)-1=2(1)^2-(1)-1=0$

2. Soit $x\in\mathbb{R}$:

On sait que $\sin(\pi-x)=\sin(x)$

Donc :

$f(\pi-x)=2\sin^2(\pi-x)-\sin(\pi-x)-1=2\sin^2(x)-\sin(x)-1=f(x)$

Et par suite : $f(\pi-x)=f(x)$, pour tout x de $\mathbb{R}$

3.

a) Résolvons dans $I=[0,2\pi[$: $f(x)=0$

$f(x)=0$ équivaut à $2\sin^2(x)-\sin(x)-1=0$

Equivaut à $(2\sin(x)+1)(\sin(x)-1)=0$

Equivaut à $2\sin(x)+1=0 \quad ou \quad \sin(x)-1=0$

Equivaut à $\sin(x)=-\dfrac{1}{2} \quad ou \quad \sin(x)=1$

▷ $\sin(x)=-\dfrac{1}{2}$ équivaut à $\sin(x)=-\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)$

Equivaut à $\begin{cases} x=\dfrac{-\pi}{6}+2k\pi \\ ou \\ x=\pi-\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)+2k\pi=\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi \end{cases} \quad (k\in\mathbb{Z})$

- $$0\leq\frac{-\pi}{6}+2k\pi<2\pi$$

  $$0\leq-\frac{1}{6}+2k<2$$

  $$\frac{1}{12}\leq k<\frac{13}{12}$$

  Puisque $k\in\mathbb{Z}$, alors $k=1$

  Donc $x=\dfrac{11\pi}{6}$

- $$0\leq\frac{7\pi}{6}+2k\pi<2\pi$$

  $$0\leq\frac{7}{6}+2k<2$$

  $$\frac{-7}{12}\leq k<\frac{5}{12}$$

  Puisque $k\in\mathbb{Z}$, alors $k=0$

  Donc $x=\dfrac{7\pi}{6}$

▷ $\sin(x)=1$ équivaut à $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

-

$$0 \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi < 2\pi$$

$$0 \leq \frac{1}{6} + 2k < 2$$

$$\frac{-1}{12} \leq k < \frac{11}{12}$$

Puisque $k \in \mathbb{Z}$, alors $k = 0$

Donc $x = \frac{\pi}{2}$

Conclusion : $S = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$

b) Résolvons dans $I = [0, 2\pi[$: $f(x) > 0$

$f(x) > 0$ équivaut à $2\sin^2(x) - \sin(x) - 1 > 0$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
$2\sin^2(x) - \sin(x) - 1$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$$S = \left] \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right[$$

Corrigé de l'exercice 3 :

1. Soit x un nombre réel vérifiant l'égalité : (1) : $\sin(x) \times \cos(x) = \frac{1}{2}$

(1) : $\sin(x) \times \cos(x) = \frac{1}{2}$ équivaut à $2\sin(x) \times \cos(x) = 1$

équivaut à $2\sin(x) \times \cos(x) = \cos^2(x) + \sin^2(x)$

équivaut à $\cos^2(x) + \sin^2(x) - 2\sin(x) \times \cos(x) = 0$

équivaut à $(\cos(x) - \sin(x))^2 = 0$

équivaut à $\cos(x) - \sin(x) = 0$

équivaut à $\sin x = \cos x$

2. Déterminons toutes les valeurs de x vérifiant (1)

   On a (1) équivaut à $\sin x = \cos x$

   Equivaut à $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

   Equivaut à $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

   Equivaut à $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ ou \\ 0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (impossible) \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

   On conclut que : $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Corrigé de l'exercice 4 :

1.

$$\begin{aligned} \cos^4(x) - \sin^4(x) &= \left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right)\left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right) \\ &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ &= \cos^2(x) - \left(1 - \cos^2(x)\right) \\ &= 2\cos^2(x) - 1 \end{aligned}$$

2. On sait que : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

   Donc : $\left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right)^3 = (1)^3$

   Donc $\left(\cos^2(x)\right)^3 + \left(\sin^2(x)\right)^3 + 3\left(\cos^2(x)\right)^2 \sin^2(x) + 3\cos^2(x)\left(\sin^2(x)\right)^2 = 1$

   Donc $\cos^6(x) + \sin^6(x) + 3\cos^4(x)\sin^2(x) + 3\cos^2(x)\sin^4(x) = 1$

   Donc $\cos^6(x) + \sin^6(x) + 3\cos^2(x)\sin^2(x)\left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right) = 1$

Et par suite $\cos^6(x)+\sin^6(x)+3\sin^2(x)\cos^2(x)=1$

Corrigé de l'exercice 5 :

1.

$$A(x)=\frac{\sin^3(x)-\cos^3(x)}{\sin(x)+\cos(x)}=\frac{\cos^3(x)\left(\frac{\sin^3(x)}{\cos^3(x)}-1\right)}{\cos(x)\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}+1\right)}=\cos^2(x)\frac{\tan^3(x)-1}{\tan(x)+1}=\frac{1}{1+\tan^2(x)}\times\frac{\tan^3(x)-1}{\tan(x)+1}$$

2.

$$B(x)=\cos^2(x)-5\sin(x)\cos(x)=\cos^2(x)\left(1-5\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\frac{1}{1+\tan^2(x)}(1-5\tan\mathrm{x})$$

つづく